

Reforço: Análise Combinatória e Probabilidade

Revisando e Aprofundando Conceitos com Exercícios Extras

Márcio Nicolau

Table of contents

Introdução e Objetivos	2
Objetivos de Aprendizagem	2
Revisão da Análise Combinatória: As Ferramentas de Contagem	2
Princípios Fundamentais de Contagem	2
Permutação: A Ordem Importa (Todos os Itens)	2
Permutação Simples	3
Permutação com Repetição	3
Arranjo Simples: A Ordem Importa (Subconjunto de Itens)	3
Combinação Simples: A Ordem NÃO Importa (Subconjunto de Itens)	3
Exemplo de Código Combinação Simples	3
Python	3
R	4
Diagrama de Fluxo de Decisão (Revisado)	5
Revisão dos Conceitos de Probabilidade	5
Experimentos Aleatórios e Espaço Amostral	5
Eventos e Suas Operações	5
Probabilidade Clássica e Propriedades	5
Regras da Adição de Probabilidades	7
Combinatória e Probabilidade: Aplicações Integradas	7
Exemplo de Código Problema Integrado	7
Python	7
R	8
Verificação de Aprendizagem	9
Referências Bibliográficas	10

List of Figures

1	Diagrama de Fluxo de Decisão	6
---	--	---

Introdução e Objetivos

Nas aulas anteriores, exploramos os fundamentos da Análise Combinatória, com foco em Permutação e Arranjo, e demos os primeiros passos no universo da Probabilidade, definindo espaço amostral e eventos. Esta aula de reforço tem como objetivo consolidar esses conhecimentos, apresentando um novo e fundamental conceito – a Combinação – e resolvendo exercícios que integram as duas áreas. A capacidade de quantificar o número de possibilidades em cenários de incerteza é crucial para o cálculo preciso de probabilidades, essencial na estatística e na ciência de dados.

Objetivos de Aprendizagem

Ao final desta aula de reforço, você será capaz de:

- Revisar e aplicar os princípios fundamentais de contagem, permutação e arranjo.
- Compreender e aplicar o conceito de combinação, distinguindo-o de arranjo e permutação.
- Revisar e aplicar os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e eventos.
- Utilizar os métodos de contagem (permutação, arranjo, combinação) para determinar o número de resultados em um espaço amostral e em eventos.
- Calcular probabilidades de eventos usando a abordagem clássica, aplicando as regras da adição quando necessário.
- Resolver problemas complexos que exigem a integração da análise combinatória com o cálculo de probabilidades.

Revisão da Análise Combinatória: As Ferramentas de Contagem

A análise combinatória nos oferece métodos sistemáticos para contar o número de maneiras de organizar ou selecionar itens.

Princípios Fundamentais de Contagem

- **Princípio Aditivo:** Usado para tarefas mutuamente exclusivas. Se uma tarefa pode ser feita de m maneiras e outra de n maneiras, e elas não podem ser feitas simultaneamente, o total é $m + n$.
- **Princípio Multiplicativo:** Usado para sequências de tarefas independentes. Se a primeira tarefa tem m maneiras e a segunda tem n maneiras (para cada uma das m), o total é $m \times n$.

Permutação: A Ordem Importa (Todos os Itens)

Permutação refere-se à organização de um conjunto de itens. A ordem dos elementos é crucial.

Permutação Simples

Número de maneiras de organizar n objetos distintos. [B@BussabMorettin2017 p. 43] **Fórmula:** $P_n = n!$

Exemplo: Quantas filas podem ser formadas com 4 pessoas?

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ filas.}$$

Permutação com Repetição

Número de permutações distintas de n objetos, onde n_1 são de um tipo, n_2 de outro, etc. (Bussab; Morettin, 2017, p. 45)

Fórmula: $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Exemplo: Quantos anagramas da palavra “BANANA”? ($n = 6$, ‘A’ repete 3x, ‘N’ repete 2x)

$$\frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{(6)(2)} = \frac{720}{12} = 60 \text{ anagramas.}$$

Arranjo Simples: A Ordem Importa (Subconjunto de Itens)

Número de maneiras de selecionar k objetos de n objetos distintos e organizá-los, onde a ordem de seleção é importante. (Bussab; Morettin, 2017, p. 44)

Fórmula: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exemplo: De quantas maneiras 5 alunos podem ocupar as 3 primeiras cadeiras de uma fila?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60 \text{ maneiras.}$$

Combinação Simples: A Ordem NÃO Importa (Subconjunto de Itens)

A **combinação** simples é usada quando queremos selecionar k objetos de um total de n objetos distintos, e a *ordem de seleção NÃO é importante*. Por exemplo, escolher um grupo de pessoas para uma comissão. A comissão {João, Maria} é a mesma que {Maria, João}. (Bussab; Morettin, 2017, p. 46)

Fórmula: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

O símbolo $\binom{n}{k}$ é lido como “n escolhe k” ou “n sobre k”.

Exemplo: Quantas comissões de 3 alunos podem ser formadas a partir de um grupo de 5 alunos?

Aqui, a ordem dos alunos na comissão não importa. $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)} = \frac{120}{6 \times 2} = \frac{120}{12} = 10$ comissões.

Exemplo de Código Combinação Simples

Python

```
import math
from itertools import combinations
```

```

def combinacao_simples(n, k):
    """Calcula a combinação simples de n elementos tomados k a k."""
    if k < 0 or k > n:
        return 0
    #  $C(n, k) = n! / (k! * (n-k)!)$ 
    return math.factorial(n) // (math.factorial(k) * math.factorial(n - k))

# Exemplo: Comissões de 3 alunos de um grupo de 5
n_alunos = 5
k_membros = 3
resultado_combinacao = combinacao_simples(n_alunos, k_membros)
print(
    f"Número de comissões de {k_membros} alunos de um grupo de {n_alunos}: {resultado_combinacao}"
)

# Listando as combinações (para visualização)
alunos = ["A", "B", "C", "D", "E"]
todas_combinacoes = list(combinations(alunos, k_membros))
print(f"Todas as combinações de {k_membros} alunos: {todas_combinacoes}")
print(f"Total de combinações listadas: {len(todas_combinacoes)}")

```

R

```

# install.packages("gtools")
library(gtools)

combinacao_simples <- function(n, k) {
  if (k < 0 || k > n) {
    return(0)
  }
  #  $C(n, k) = n! / (k! * (n-k)!)$ 
  return(factorial(n) / (factorial(k) * factorial(n - k)))
}

# Exemplo: Comissões de 3 alunos de um grupo de 5
n_alunos <- 5
k_membros <- 3
resultado_combinacao <- combinacao_simples(n_alunos, k_membros)
cat(sprintf("Número de comissões de %d alunos de um grupo de %d: %d\n", k_membros, n_alunos, resultado_

# Listando as combinações (para visualização)
alunos <- c('A', 'B', 'C', 'D', 'E')
todas_combinacoes <- combinations(n = n_alunos, r = k_membros, v = alunos)

```

```
print("Todas as combinações de alunos:")
print(todas_combinacoes)
cat(sprintf("Total de combinações listadas: %d\n", nrow(todas_combinacoes)))
```

Diagrama de Fluxo de Decisão (Revisado)

Para auxiliar na distinção entre Permutação, Arranjo e Combinação:

(Para permutação com repetição, a distinção é uma ramificação de Permutação Simples: “Há elementos repetidos?” -> “Sim” -> Permutação com Repetição)

Revisão dos Conceitos de Probabilidade

Probabilidade é a quantificação da chance de um evento ocorrer.

Experimentos Aleatórios e Espaço Amostral

- **Experimento Aleatório:** Processo com resultados incertos, mas conhecidos de antemão (ex: lançamento de dado).
- **Espaço Amostral (Ω ou S):** O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. (Ex: Para um dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Eventos e Suas Operações

- **Evento:** Qualquer subconjunto do espaço amostral.
- **Evento Simples:** Um único resultado do espaço amostral.
- **Evento Composto:** Dois ou mais resultados.
- **União ($A \cup B$):** A ou B ocorre.
- **Interseção ($A \cap B$):** A e B ocorrem simultaneamente.
- **Complemento (A^c ou $\bar{A}$):** A não ocorre.
- **Eventos Mutuamente Exclusivos (ou Disjuntos):** $A \cap B = \emptyset$ (não podem ocorrer juntos).

Probabilidade Clássica e Propriedades

Para resultados equiprováveis: (Bussab; Morettin, 2017, p. 57)

Fórmula: $P(E) = \frac{\text{Resultados favoráveis ao evento } E(n_E)}{\text{Resultados possíveis no espaço amostral } (N)}$

Propriedades:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$ para qualquer evento E .
2. $P(\Omega) = 1$ (probabilidade do evento certo).
3. $P(\emptyset) = 0$ (probabilidade do evento impossível).
4. $P(E^c) = 1 - P(E)$.

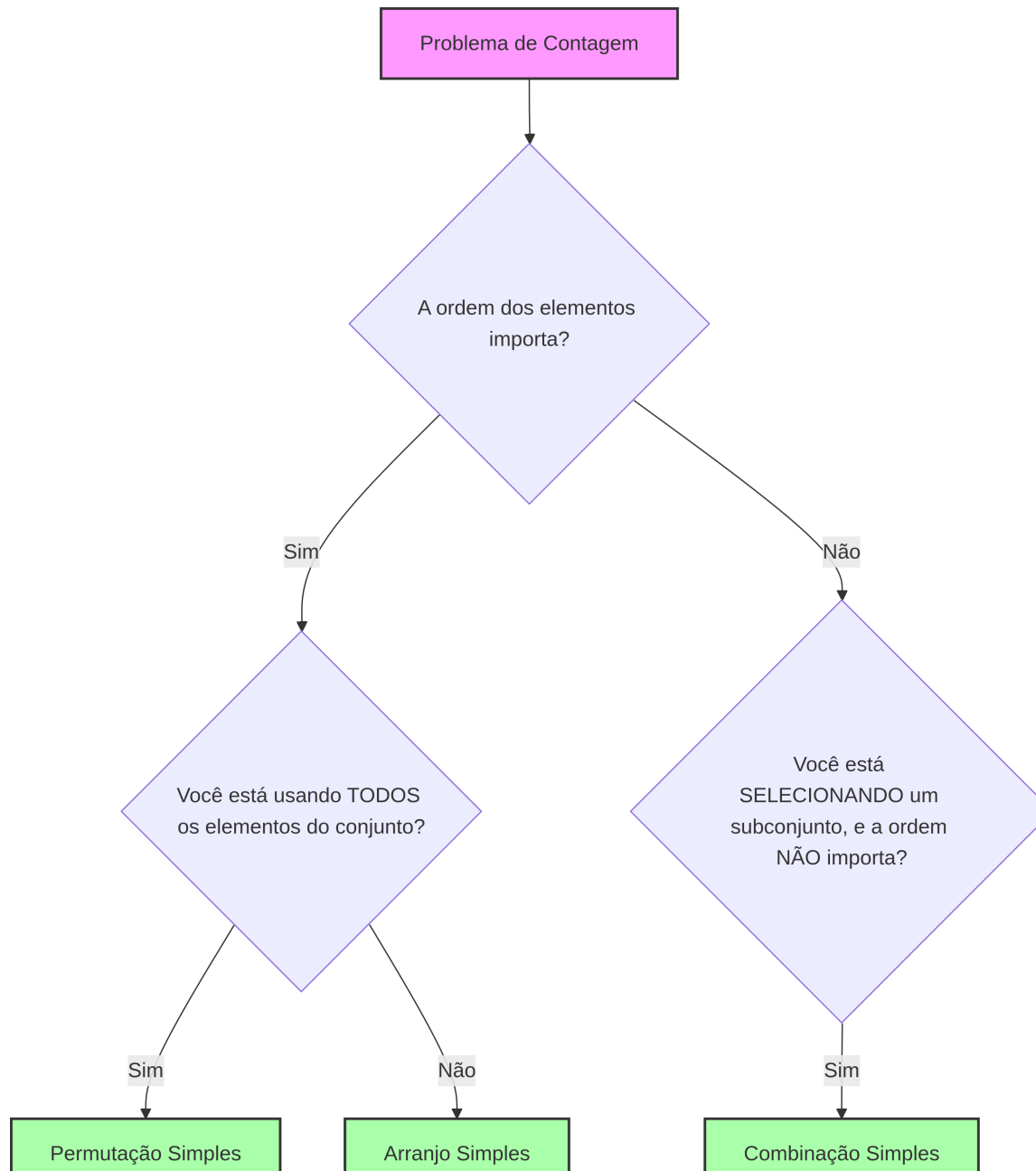


Figure 1: Diagrama de Fluxo de Decisão

Regras da Adição de Probabilidades

- Para eventos **Mutuamente Exclusivos**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Para eventos **Não Mutuamente Exclusivos**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Combinatória e Probabilidade: Aplicações Integradas

A verdadeira força da combinatória se revela no cálculo de probabilidades para cenários mais complexos, onde N e n_E não são óbvios e exigem métodos de contagem.

Exemplo Integrado: Em uma turma com 10 meninos e 8 meninas, 3 alunos serão selecionados aleatoriamente para representar a turma em um evento.

- Qual a probabilidade de que os 3 alunos selecionados sejam meninos?
- Qual a probabilidade de que sejam 2 meninos e 1 menina?

Solução

Solução:

- **Total de alunos:** $10 + 8 = 18$.
- **Vamos selecionar 3 alunos.** A ordem da seleção *não importa* para formar o grupo. Portanto, usaremos **Combinação**.

Espaço Amostral (N): Número total de maneiras de selecionar 3 alunos de 18.

$$N = C_{18}^3 = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \frac{18!}{3!15!} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 17 \times 16 = 816 \text{ maneiras.}$$

a) **Evento E1: “Os 3 alunos selecionados são meninos”**

- Número de meninos = 10. Queremos selecionar 3 meninos.
- $n_{E1} = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$ maneiras.
- $P(E1) = \frac{n_{E1}}{N} = \frac{120}{816} \approx 0.147$

b) **Evento E2: “2 meninos e 1 menina”**

- Número de maneiras de selecionar 2 meninos de 10: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ maneiras.
- Número de maneiras de selecionar 1 menina de 8: $C_8^1 = \frac{8!}{1!7!} = 8$ maneiras.
- Pelo Princípio Multiplicativo (selecionar meninos E meninas): $n_{E2} = C_{10}^2 \times C_8^1 = 45 \times 8 = 360$ maneiras.
- $P(E2) = \frac{n_{E2}}{N} = \frac{360}{816} \approx 0.441$

Exemplo de Código Problema Integrado

Python

```
import math
from itertools import combinations

def calcular_combinacao(n, k):
    return math.factorial(n) // (math.factorial(k) * math.factorial(n - k))
```

```

# Dados do problema
total_alunos = 18
num_meninos = 10
num_meninas = 8
selecionar = 3

# --- Espaço Amostral (N) ---
N = calcular_combinacao(total_alunos, selecionar)
print(f"Total de maneiras de selecionar 3 alunos (N): {N}")

# --- Evento E1: 3 meninos ---
n_e1 = calcular_combinacao(num_meninos, selecionar)
prob_e1 = n_e1 / N
print(f"Maneiras de selecionar 3 meninos (n_E1): {n_e1}")
print(f"P(3 meninos) = {prob_e1:.3f}")

# --- Evento E2: 2 meninos e 1 menina ---
n_e2_meninos = calcular_combinacao(num_meninos, 2)
n_e2_meninas = calcular_combinacao(num_meninas, 1)
n_e2 = n_e2_meninos * n_e2_meninas # Princípio Multiplicativo
prob_e2 = n_e2 / N
print(f"Maneiras de selecionar 2 meninos e 1 menina (n_E2): {n_e2}")
print(f"P(2 meninos e 1 menina) = {prob_e2:.3f}")

```

R

```

library(gtools) # Para usar a função combinations se preferir, ou definir a função manualmente

calcular_combinacao <- function(n, k) {
  return(factorial(n) / (factorial(k) * factorial(n - k)))
}

# Dados do problema
total_alunos <- 18
num_meninos <- 10
num_meninas <- 8
selecionar <- 3

# --- Espaço Amostral (N) ---
N <- calcular_combinacao(total_alunos, selecionar)
cat(sprintf("Total de maneiras de selecionar %d alunos (N): %d\n", selecionar, N))

# --- Evento E1: 3 meninos ---
n_e1 <- calcular_combinacao(num_meninos, selecionar)

```



```

prob_e1 <- n_e1 / N
cat(sprintf("Maneiras de selecionar %d meninos (n_E1): %d\n", selecionar, n_e1))
cat(sprintf("P(%d meninos) = %.3f\n", selecionar, prob_e1))

# --- Evento E2: 2 meninos e 1 menina ---
n_e2_meninos <- calcular_combinacao(num_meninos, 2)
n_e2_meninas <- calcular_combinacao(num_meninas, 1)
n_e2 <- n_e2_meninos * n_e2_meninas # Princípio Multiplicativo
prob_e2 <- n_e2 / N
cat(sprintf("Maneiras de selecionar 2 meninos e 1 menina (n_E2): %d\n", n_e2))
cat(sprintf("P(2 meninos e 1 menina) = %.3f\n", prob_e2))

```

Verificação de Aprendizagem

Resolva os problemas abaixo, identificando o método de contagem apropriado (permutação, arranjo ou combinação) e aplicando-o para calcular as probabilidades solicitadas.

1. Formação de Comitê:

Em um departamento de 12 professores, sendo 7 homens e 5 mulheres, um comitê de 4 professores será formado.

- De quantas maneiras diferentes o comitê pode ser formado?
- Qual a probabilidade de que o comitê seja composto por 2 homens e 2 mulheres?
- Qual a probabilidade de que o comitê tenha apenas homens?
- Qual a probabilidade de que o comitê tenha pelo menos uma mulher?

2. Números de Telefone:

Considere números de telefone de 8 dígitos, excluindo o prefixo (DDD e DDI). O primeiro dígito não pode ser zero.

- Quantos números de telefone distintos podem ser formados se a repetição de dígitos é permitida?
- Quantos números de telefone distintos podem ser formados se a repetição de dígitos NÃO é permitida?
- Qual a probabilidade de um número de telefone aleatório (com repetição permitida) ter todos os dígitos pares?

3. Ordem de Chegada:

Em uma corrida com 6 corredores (A, B, C, D, E, F), de quantas maneiras diferentes os 3 primeiros lugares podem ser ocupados? Qual a probabilidade de o corredor A chegar em primeiro, B em segundo e C em terceiro?

4. Cartas de Baralho:

Um baralho de 52 cartas é bem embaralhado. Duas cartas são retiradas *sem reposição*.

- Qual a probabilidade de que ambas as cartas sejam Ases?
- Qual a probabilidade de que uma carta seja um Ás e a outra seja um Rei (em qualquer ordem)?

Referências Bibliográficas

BUSSAB, Luiz O. de M.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.