

Introdução à Probabilidade e Eventos

Entendendo Conceitos de Probabilidade, Espaço Amostral e Eventos

Márcio Nicolau

2025-08-20

Table of contents

Introdução à Probabilidade	2
Objetivo de Aprendizagem	2
Experimentos Aleatórios e o Conceito de Probabilidade	2
Experimento Aleatório	2
Conceito de Probabilidade	3
Abordagem Clássica (ou de Laplace)	3
Abordagem da Frequência Relativa (ou Empírica)	3
Abordagem Subjetiva	3
Espaço Amostral (Ω ou S)	4
Tipos de Espaço Amostral	4
Construindo Espaços Amostrais com Python e R	4
Lançamento de uma Moeda	4
Python	4
R	4
Lançamento de Duas Moedas	5
Python	5
R	5
Lançamento de um Dado	6
Python	6
R	6
Eventos	6
Tipos de Eventos	6
Operações com Eventos	6
União de Eventos ($\cup$)	7
Interseção de Eventos ($\cap$)	7
Complemento de um Evento (A^c ou $\bar{A}$)	7
Eventos Mutuamente Exclusivos (ou Disjuntos)	7

Eventos Coletivamente Exaustivos	11
Cálculo de Probabilidade Utilizando a Abordagem Clássica	12
Exemplo Cálculo de Probabilidade Simples	12
Python	12
R	13
Regras da Adição de Probabilidades	13
Verificação de Aprendizagem	14
Referências Bibliográficas	15

List of Figures

1	Diagrama de Venn para a união de dois eventos	8
2	Interseção de dois eventos	9
3	Complemento de um evento	10
4	Diagrama de Venn para dois eventos mutuamente exclusivos	11

Introdução à Probabilidade

A probabilidade é a linguagem da incerteza. Em nosso mundo, repleto de fenômenos aleatórios, a capacidade de quantificar a chance de um evento ocorrer é fundamental para a tomada de decisões em diversas áreas, desde finanças e medicina até engenharia e, claro, ciência de dados. Compreender os conceitos básicos de probabilidade é o alicerce para análises estatísticas mais avançadas, modelagem preditiva e inferência.

Nesta aula, exploraremos os conceitos fundamentais que nos permitem descrever e quantificar a incerteza: o que é probabilidade, como definir o universo de possibilidades (espaço amostral) e como caracterizar os resultados de interesse (eventos).

Objetivo de Aprendizagem

Ao final desta aula, você será capaz de:

- Definir e compreender o conceito de experimento aleatório e probabilidade.
- Identificar e construir o espaço amostral para diferentes experimentos aleatórios.
- Definir e classificar diferentes tipos de eventos.
- Realizar operações básicas com eventos (união, interseção, complemento) e interpretá-las.
- Aplicar o conceito clássico de probabilidade para calcular a chance de eventos simples.
- Conectar os conhecimentos de análise combinatória (aula anterior) ao cálculo de probabilidades.

Experimentos Aleatórios e o Conceito de Probabilidade

Experimento Aleatório

Um **experimento aleatório** é qualquer processo ou ação que:

1. Pode ser repetido sob as mesmas condições.
2. Os resultados não podem ser previstos com certeza antes da sua realização.
3. Todos os resultados possíveis podem ser listados de antemão.

Exemplos

- Lançamento de uma moeda.
- Lançamento de um dado.
- Retirada de uma carta de um baralho.
- Medir a altura de um indivíduo selecionado aleatoriamente.
- O número de clientes que entram em uma loja em uma hora.

Conceito de Probabilidade

Em termos intuitivos, a **probabilidade** de um evento é uma medida numérica da chance de que ele ocorra. É expressa como um número entre 0 e 1 (ou 0% e 100%), onde:

- 0 indica que o evento é impossível.
- 1 indica que o evento é certo.

Formalmente, existem diferentes abordagens para definir probabilidade:

Abordagem Clássica (ou de Laplace)

Se um experimento aleatório tem N resultados possíveis, todos igualmente prováveis, e um evento E tem n_E resultados favoráveis, então a probabilidade do evento E é:

$$P(E) = \frac{\text{Resultados favoráveis ao evento } E}{\text{Resultados possíveis no espaço amostral}} = \frac{n_E}{N}$$

Esta abordagem é aplicável quando os resultados são simétricos e equiprováveis (por exemplo, lançamento de um dado justo).

Abordagem da Frequência Relativa (ou Empírica)

Se um experimento é repetido um grande número de vezes (N tentativas), e um evento E ocorre n_E vezes, então a probabilidade do evento E é aproximada pela frequência relativa:

$$P(E) \approx \frac{n_E}{N} \text{ (quando } N \text{ é grande)}$$

Essa abordagem é útil quando os resultados não são equiprováveis ou são difíceis de enumerar.

Abordagem Subjetiva

A probabilidade subjetiva é baseada na crença pessoal ou julgamento de um indivíduo sobre a ocorrência de um evento, muitas vezes em situações onde não há dados históricos ou simetria para aplicar as outras abordagens.

Nesta aula, focaremos principalmente nas abordagens clássica e no entendimento de eventos e espaços amostrais.

Propriedades Fundamentais da Probabilidade: (Bussab; Morettin, 2017, p. 57–58)

1. Para qualquer evento E , $0 \leq P(E) \leq 1$.
2. A probabilidade do espaço amostral (evento certo) é $P(\Omega) = 1$.
3. A probabilidade do evento impossível é $P(\emptyset) = 0$.

Espaço Amostral (Ω ou S)

O **espaço amostral** de um experimento aleatório é o conjunto de *todos* os resultados possíveis desse experimento. É usualmente denotado por Ω (ômega maiúscula) ou S .

Tipos de Espaço Amostral

- **Espaço Amostral Finito:** Contém um número limitado de resultados.
 - **Exemplo:** Lançamento de um dado. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 - **Exemplo:** Lançamento de duas moedas. $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- **Espaço Amostral Infinito Contável:** Contém um número infinito de resultados que podem ser contados (enumerados) em uma sequência.
 - **Exemplo:** Número de vezes que uma moeda precisa ser lançada até que a primeira “cara” apareça. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **Espaço Amostral Infinito Não Contável (ou Contínuo):** Contém um número infinito de resultados que não podem ser contados, mas sim medidos (intervalos de números reais).
 - **Exemplo:** O tempo de vida de uma lâmpada. $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$

Construindo Espaços Amostrais com Python e R

Lançamento de uma Moeda

Python

```
def lancar_moeda():
    return ['Cara', 'Coroa']

espaco_amostrai_moeda = lancar_moeda()
print(f"Espaço Amostral (1 moeda): {espaco_amostrai_moeda}")
```

R

```
lancar_moeda <- function() {
  return(c("Cara", "Coroa"))
}
```

```
espaco_amostral_moeda <- lancar_moeda()
cat("Espaço Amostral (1 moeda):", espaco_amostral_moeda, "\n")
```

Lançamento de Duas Moedas

Python

```
from itertools import product

def lancar_duas_moedas():
    resultados_uma_moeda = ['C', 'K'] # C para Cara, K para Coroa
    # product gera todas as combinações possíveis com repetição
    espaco_amostral = list(product(resultados_uma_moeda, repeat=2))
    # Convertendo para strings legíveis
    return [''.join(res) for res in espaco_amostral]

espaco_amostral_duas_moedas = lancar_duas_moedas()
print(f"Espaço Amostral (2 moedas): {espaco_amostral_duas_moedas}")
print(f"Tamanho do Espaço Amostral: {len(espaco_amostral_duas_moedas)}")
```

R

```
# install.packages("gtools") # Se ainda não tiver
library(gtools)

lancar_duas_moedas <- function() {
  resultados_uma_moeda <- c('C', 'K') # C para Cara, K para Coroa
  # expand.grid cria um data frame com todas as combinações
  espaco_amostral_df <- expand.grid(
    moeda1 = resultados_uma_moeda,
    moeda2 = resultados_uma_moeda
  )
  # Juntando as colunas para obter strings como "CC", "CK"
  espaco_amostral <- apply(espaco_amostral_df, 1, paste, collapse = "")
  return(espaco_amostral)
}

espaco_amostral_duas_moedas <- lancar_duas_moedas()
cat("Espaço Amostral (2 moedas):", espaco_amostral_duas_moedas, "\n")
cat("Tamanho do Espaço Amostral:", length(espaco_amostral_duas_moedas), "\n")
```

Lançamento de um Dado

Python

```
def lancar_dado():  
    return list(range(1, 7))  
  
espaco_amostral_dado = lancar_dado()  
print(f"Espaço Amostral (1 dado): {espaco_amostral_dado}")
```

R

```
lancar_dado <- function() {  
  return(1:6)  
}  
  
espaco_amostral_dado <- lancar_dado()  
cat("Espaço Amostral (1 dado):", espaco_amostral_dado, "\n")
```

Eventos

Um **evento** é qualquer subconjunto do espaço amostral. Ele representa um resultado ou um conjunto de resultados de interesse em um experimento aleatório.

Tipos de Eventos

- **Evento Simples (ou Elementar):** Contém apenas um resultado do espaço amostral.
 - **Exemplo (Lançamento de um dado):** “Obter o número 3”. $E = \{3\}$
- **Evento Composto:** Contém dois ou mais resultados do espaço amostral.
 - **Exemplo (Lançamento de um dado):** “Obter um número par”. $E = \{2, 4, 6\}$
- **Evento Certo:** É o próprio espaço amostral Ω . É o evento que certamente ocorrerá.
 - **Exemplo (Lançamento de um dado):** “Obter um número menor que 7”. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
- **Evento Impossível:** É o conjunto vazio $\emptyset$. É o evento que nunca ocorrerá.
 - **Exemplo (Lançamento de um dado):** “Obter o número 7”. $E = \emptyset$

Operações com Eventos

Assim como conjuntos, podemos realizar operações com eventos para descrever situações mais complexas. [Bussab & Morettin, 2017, p. 52-54]

União de Eventos ($\cup$)

A **união** de dois eventos A e B , denotada por $A \cup B$, é o evento que ocorre se A ou B (ou ambos) ocorrem. Em termos de conjuntos, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Exemplo (Lançamento de um dado):

- Evento A: “Obter um número par” = $\{2, 4, 6\}$
- Evento B: “Obter um número primo” = $\{2, 3, 5\}$
- $A \cup B$: “Obter um número par ou um número primo” = $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

Diagrama de Venn:

(Representa a área sombreada de A e B , incluindo a interseção)

Interseção de Eventos ($\cap$)

A **interseção** de dois eventos A e B , denotada por $A \cap B$, é o evento que ocorre se A e B ocorrem simultaneamente. Em termos de conjuntos, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Exemplo (Lançamento de um dado):

- Evento A: “Obter um número par” = $\{2, 4, 6\}$
- Evento B: “Obter um número primo” = $\{2, 3, 5\}$
- $A \cap B$: “Obter um número par e primo” = $\{2\}$

Diagrama de Venn:

(Representa apenas a área sombreada da interseção entre A e B)

Complemento de um Evento (A^c ou $\bar{A}$)

O **complemento** de um evento A , denotado por A^c ou $\bar{A}$, é o evento que ocorre se A não ocorre. Em termos de conjuntos, $A^c = \{x \mid x \in \Omega \text{ e } x \notin A\}$.

Exemplo (Lançamento de um dado):

- Espaço Amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Evento A: “Obter um número par” = $\{2, 4, 6\}$
- A^c : “Não obter um número par” (ou “Obter um número ímpar”) = $\{1, 3, 5\}$

Diagrama de Venn:

(Representa a área sombreada do Espaço Amostral fora* de A)*

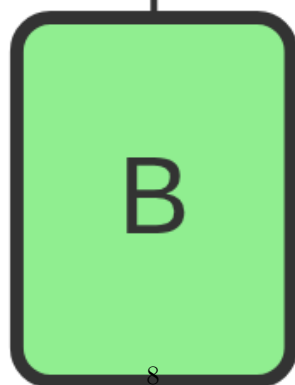
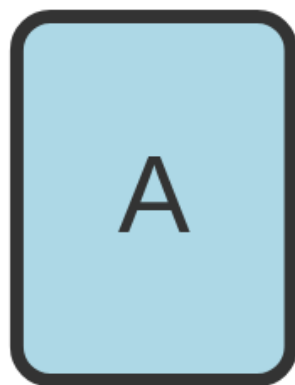
Eventos Mutuamente Exclusivos (ou Disjuntos)

Dois eventos A e B são **mutuamente exclusivos** se eles não podem ocorrer ao mesmo tempo. Isso significa que sua interseção é o conjunto vazio ($A \cap B = \emptyset$).

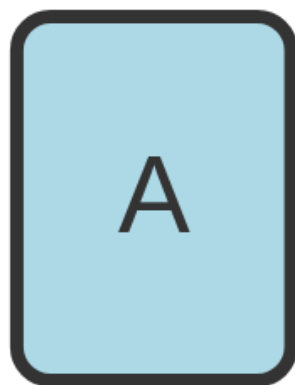
Exemplo (Lançamento de um dado):

- Evento A: “Obter um número par” = $\{2, 4, 6\}$
- Evento B: “Obter um número ímpar” = $\{1, 3, 5\}$

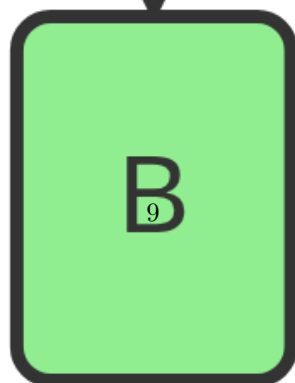
Espaço Amostral (Ω)



Espaço Amostral (Ω)



Interseção



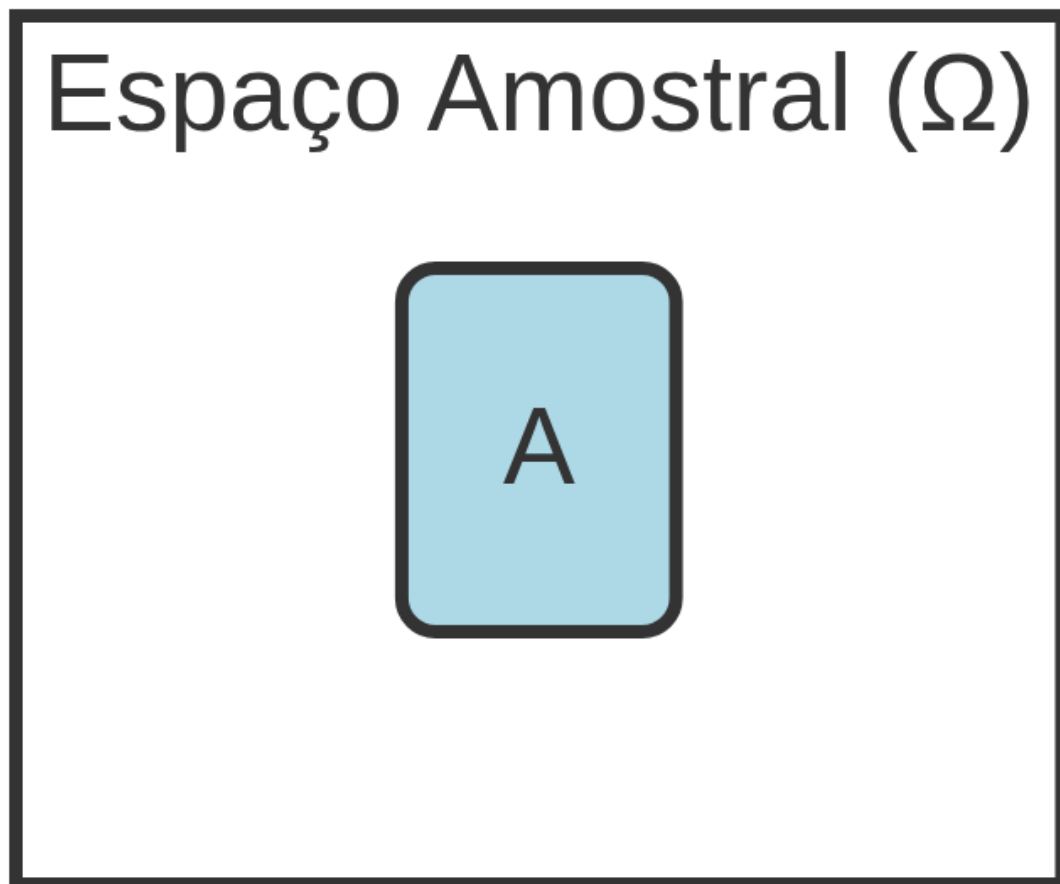


Figure 3: Complemento de um evento

- $A \cap B = \emptyset$. Portanto, A e B são mutuamente exclusivos.

Diagrama de Venn:

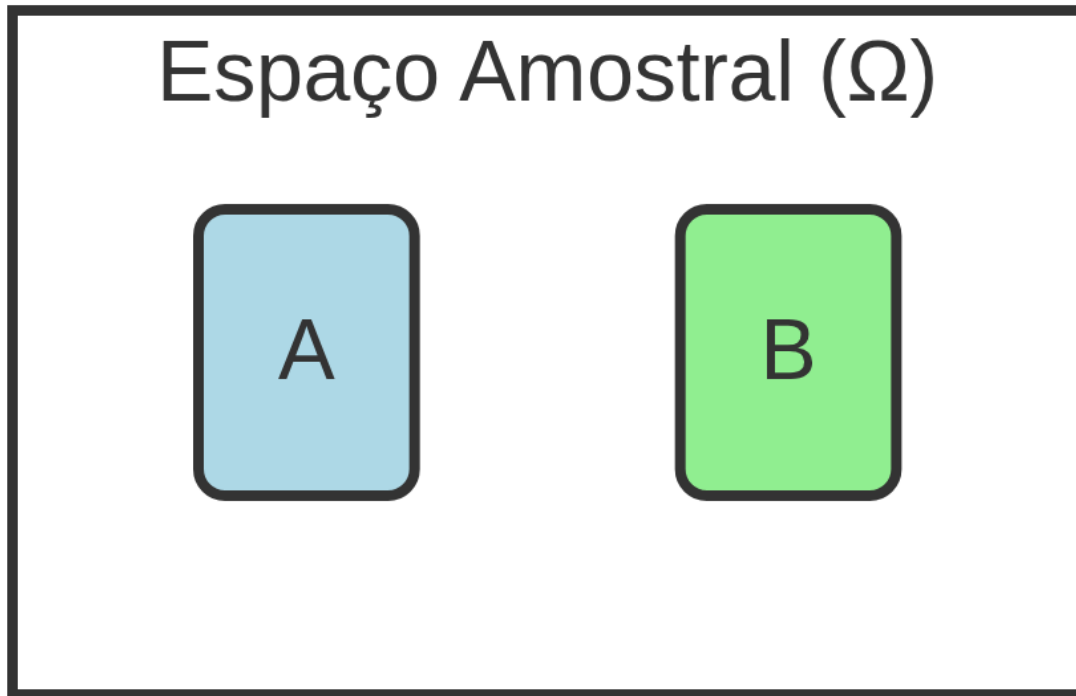


Figure 4: Diagrama de Venn para dois eventos mutuamente exclusivos

(Círculos A e B não se sobrepõem)

Eventos Coletivamente Exaustivos

Um conjunto de eventos é **coletivamente exaustivo** se a união de todos eles cobre todo o espaço amostral (Ω).

Exemplo (Lançamento de um dado):

- Evento A: “Obter um número par” = $\{2, 4, 6\}$
- Evento B: “Obter um número ímpar” = $\{1, 3, 5\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$. Portanto, A e B são coletivamente exaustivos. (Neste caso, também são mutuamente exclusivos).

Cálculo de Probabilidade Utilizando a Abordagem Clássica

Agora que entendemos espaço amostral e eventos, podemos aplicar a fórmula da probabilidade clássica:

$$P(E) = \frac{\text{Resultados favoráveis ao evento E}}{\text{Resultados possíveis no espaço amostral}}$$

! Lembre-se

A Análise Combinatória (permutação, arranjo, e em breve combinação) é essencial para determinar esses “números de resultados” em cenários mais complexos.

i Exemplo: Lançamento de um Dado

Espaço Amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então $N = 6$.

- **Evento E1:** “Obter um número par”
 - $E1 = \{2, 4, 6\}$, então $n_{E1} = 3$.
 - $P(E1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$
- **Evento E2:** “Obter um número maior que 4”
 - $E2 = \{5, 6\}$, então $n_{E2} = 2$.
 - $P(E2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.333$

Exemplo Cálculo de Probabilidade Simples

Python

```
# Lançamento de um dado
espaco_amostral_dado = list(range(1, 7))
N = len(espaco_amostral_dado)
print(f"Espaço Amostral do Dado: {espaco_amostral_dado}, N = {N}")

# Evento E1: Obter um número par
evento_e1 = [x for x in espaco_amostral_dado if x % 2 == 0]
n_e1 = len(evento_e1)
prob_e1 = n_e1 / N
print(f"Evento E1 (número par): {evento_e1}, n(E1) = {n_e1}")
print(f"P(E1) = {prob_e1:.3f}")

# Evento E2: Obter um número maior que 4
evento_e2 = [x for x in espaco_amostral_dado if x > 4]
n_e2 = len(evento_e2)
prob_e2 = n_e2 / N
print(f"Evento E2 (número > 4): {evento_e2}, n(E2) = {n_e2}")
print(f"P(E2) = {prob_e2:.3f}")
```

R

```
# Lançamento de um dado
espaco_amostrado_dado <- 1:6
N <- length(espaco_amostrado_dado)
cat(sprintf(
  "Espaço Amostral do Dado: %s, N = %d\n",
  paste(espaco_amostrado_dado, collapse = ", "),
  N
))

# Evento E1: Obter um número par
evento_e1 <- espaco_amostrado_dado[espaco_amostrado_dado %% 2 == 0]
n_e1 <- length(evento_e1)
prob_e1 <- n_e1 / N
cat(sprintf(
  "Evento E1 (número par): %s, n(E1) = %d\n",
  paste(evento_e1, collapse = ", "),
  n_e1
))
cat(sprintf("P(E1) = %.3f\n", prob_e1))

# Evento E2: Obter um número maior que 4
evento_e2 <- espaco_amostrado_dado[espaco_amostrado_dado > 4]
n_e2 <- length(evento_e2)
prob_e2 <- n_e2 / N
cat(sprintf(
  "Evento E2 (número > 4): %s, n(E2) = %d\n",
  paste(evento_e2, collapse = ", "),
  n_e2
))
cat(sprintf("P(E2) = %.3f\n", prob_e2))
```

Regras da Adição de Probabilidades

1. **Para eventos mutuamente exclusivos:** Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de A ou B ocorrer é a soma das suas probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. **Para eventos não mutuamente exclusivos:** Se A e B não são mutuamente exclusivos, a probabilidade de A ou B ocorrer é:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ A interseção é subtraída para evitar contagem dupla dos resultados que estão em ambos os eventos.

Exemplo (Lançamento de um dado):

- Evento A: “Obter um número par” ($P(A) = 3/6$)
- Evento B: “Obter um número maior que 4” ($P(B) = 2/6$)
- $A \cap B = \{6\}$, então $P(A \cap B) = 1/6$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Verificando: $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, que tem 4 resultados, então $P(A \cup B) = 4/6$.

Verificação de Aprendizagem

Resolva os problemas abaixo, definindo o espaço amostral e os eventos, e calculando as probabilidades quando solicitado.

1. Lançamento de Três Moedas:

- Defina o espaço amostral (Ω) para o lançamento de três moedas. Quantos resultados existem?
- Defina o evento A: “Obter exatamente duas caras”.
- Defina o evento B: “Obter pelo menos uma coroa”.
- Defina o evento C: “Obter três resultados iguais”.
- Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$.
- Calcule $P(A \cup B)$.
- Calcule $P(A \cap C)$. Os eventos A e C são mutuamente exclusivos?

2. Baralho de Cartas:

Um baralho padrão possui 52 cartas, sendo 4 naipes (Copas, Ouros, Espadas, Paus) e 13 valores em cada naipe (A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K). Uma carta é retirada aleatoriamente de um baralho bem embaralhado.

- Qual o espaço amostral e seu tamanho?
- Qual a probabilidade de a carta ser de Copas?
- Qual a probabilidade de a carta ser um Ás?
- Qual a probabilidade de a carta ser de Copas E um Ás?
- Qual a probabilidade de a carta ser de Copas OU um Ás?

3. Seleção de Pessoas:

Em um grupo de 15 pessoas, 8 são homens e 7 são mulheres. Duas pessoas são selecionadas aleatoriamente sem reposição.

- Qual o número total de maneiras de selecionar 2 pessoas? (Dica: A ordem da seleção não importa aqui, mas para fins de espaço amostral, podemos considerar os pares ordenados e ajustar a contagem de eventos, ou pensar em combinação, que será vista na próxima aula, mas o conceito de arranjo pode ser adaptado para pensar nos *pares* de pessoas). Para esta aula, vamos considerar a *ordem importa* para o espaço amostral para fins de aplicação de arranjo, e então focar na probabilidade de eventos específicos.
- Qual a probabilidade de ambas serem mulheres?
- Qual a probabilidade de ser um homem e uma mulher (nessa ordem)?
- Qual a probabilidade de ser um homem e uma mulher (em qualquer ordem)?

Referências Bibliográficas

BUSSAB, Luiz O. de M.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

MAGALHÃES, Marcos N.; LIMA, Antonio C. P. de. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

TRIOLA, Mario F. **Introdução à Estatística**. 12. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.