Estimação: Ponto e Intervalo de Confiança

Estimando Parâmetros Populacionais e Construindo Intervalos de Confiança

Márcio Nicolau

2025-10-08

Table of contents

List of Figures

Introdução e Objetivos

Nas aulas anteriores, aprendemos sobre amostragem e a importância de coletar dados de um subconjunto da população. O objetivo final da amostragem é usar as informações da amostra para fazer inferências sobre a população da qual ela foi retirada. É aqui que entramos no campo da **Estimação**.

A estimação é o processo de utilizar dados amostrais para calcular ou prever valores desconhecidos de parâmetros populacionais. Raramente temos acesso a toda a população, então a estatística nos fornece ferramentas para fazer as melhores "apostas" sobre esses parâmetros. Abordaremos duas formas principais de estimação: a **estimação pontual**, que fornece um único valor como a melhor estimativa, e a **estimação por intervalo**, que oferece um alcance de valores dentro do qual o parâmetro populacional provavelmente se encontra, acompanhado de um nível de confiança.

Este é um pilar fundamental da inferência estatística, permitindo-nos ir além da descrição dos dados amostrais para fazer generalizações sobre o universo de interesse.

Objetivos de Aprendizagem

Ao final desta aula, você será capaz de:

- Distinguir entre estimação pontual e estimação por intervalo.
- Compreender os conceitos de estimador, estimativa, erro padrão, nível de confiança e margem de erro.
- Construir e interpretar intervalos de confiança para a média populacional (com variância conhecida e desconhecida).
- Construir e interpretar intervalos de confiança para a proporção populacional.
- Reconhecer os fatores que influenciam a largura de um intervalo de confiança.
- Utilizar Python e R para calcular estimações pontuais e construir intervalos de confiança.

Estimação Pontual

A **estimação pontual** envolve o uso de uma estatística amostral (calculada a partir da amostra) para estimar um parâmetro populacional desconhecido com um único valor. Este valor é chamado de **estimativa pontual**.

- **Estimador:** É a regra ou fórmula usada para calcular a estimativa (por exemplo, a média amostral $\bar{X}$).
- **Estimativa:** É o valor numérico específico obtido pelo estimador a partir de uma amostra particular (por exemplo, $\bar{x} = 15.7$).

Exemplos Comuns de Estimativas Pontuais:

- A **média amostral** ($\bar{x}$) é a estimativa pontual mais comum para a **média populacional** (μ).
- A **proporção amostral** ($\hat{p}$) é a estimativa pontual para a **proporção populacional** (P).
- O **desvio padrão amostral** (s) é a estimativa pontual para o **desvio padrão populacional** (σ).

Vantagens: Simples e fácil de entender.

Desvantagens: Não nos diz quão "boa" é a estimativa, ou seja, não há nenhuma indicação da precisão ou da variabilidade associada a ela. É improvável que a estimativa pontual seja *exatamente* igual ao parâmetro populacional.

Diagrama: Estimação Pontual

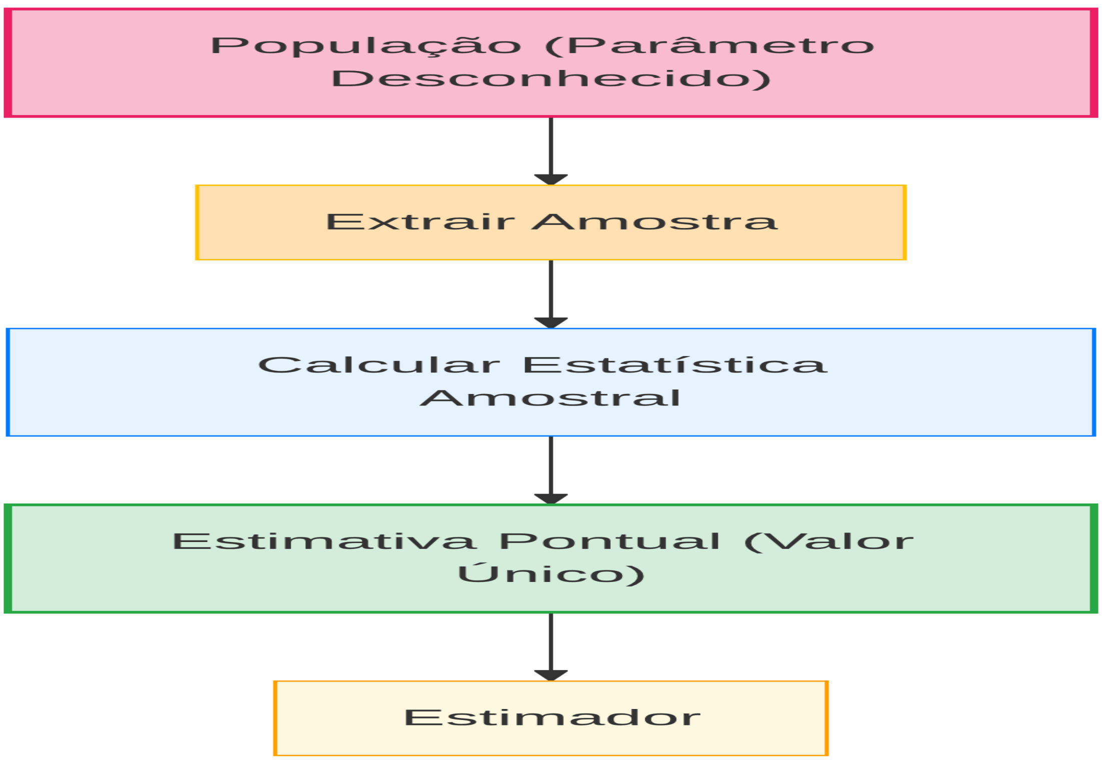

Figure 1: Diagrama da Estimação Pontual

Estimação por Intervalo (Intervalos de Confiança)

A **estimação por intervalo** fornece um alcance de valores, chamado de **intervalo de confiança (IC)**, dentro do qual o parâmetro populacional provavelmente se encontra. Ela é acompanhada por um **nível de confiança**, que expressa a probabilidade de que este intervalo contenha o verdadeiro parâmetro populacional.

Conceitos Chave

- **Nível de Confiança** $(1 - \alpha)$**:** É a probabilidade de que o intervalo de confiança contenha o verdadeiro parâmetro populacional. Geralmente expresso como uma porcentagem (ex: 90%, 95%, 99%). Um nível de confiança de 95% significa que, se repetíssemos o processo de amostragem e construção de intervalos muitas vezes, esperaríamos que 95% desses intervalos contivessem o verdadeiro parâmetro populacional.

- **Margem de Erro (ME):** É a metade da largura do intervalo de confiança. Ela representa a quantidade máxima em que a estimativa pontual pode diferir do verdadeiro parâmetro populacional com o nível de confiança especificado.
- **Erro Padrão (EP):** É o desvio padrão da distribuição amostral de uma estatística (ex: erro padrão da média, erro padrão da proporção). Ele mede a variabilidade das estatísticas amostrais de amostra para amostra.

A forma geral de um intervalo de confiança é: (Bussab; Morettin, 2017, p. 195)

$$\text{Estimativa Pontual} \pm \text{Margem de Erro}$$

A Margem de Erro é calculada como:

$$\text{Margem de Erro} = \text{Valor Crítico} \times \text{Erro Padrão do Estimador}$$

O **Valor Crítico** é um valor da distribuição de probabilidade (normal ou t-student) que corresponde ao nível de confiança desejado.

Intervalo de Confiança para a Média Populacional (μ)

Com Desvio Padrão Populacional (σ) Conhecido (Distribuição Z)

Quando o desvio padrão populacional (σ) é conhecido (situação rara na prática, mas importante para a teoria ou quando n é grande e s é usado como σ).

Requisito: A população é normalmente distribuída ou o tamanho da amostra é grande ($n \geq 30$, pelo Teorema do Limite Central).

Fórmula: (Bussab; Morettin, 2017, p. 195)

$$IC = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Onde:

- $\bar{x}$: média amostral.
- $Z_{\alpha/2}$: valor crítico da distribuição normal padrão para o nível de confiança $1 - \alpha$.
- σ: desvio padrão populacional.
- n: tamanho da amostra.
- $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: erro padrão da média.

Valores comuns de $Z_{\alpha/2}$:

- 90% de confiança: $Z_{0.05} = 1.645$
- 95% de confiança: $Z_{0.025} = 1.96$
- 99% de confiança: $Z_{0.005} = 2.576$

Exemplo: Uma amostra de 50 alunos tem média de altura de 170 cm. Suponha que o desvio padrão populacional conhecido seja de 10 cm. Construa um IC de 95% para a altura média da população.

- $\bar{x} = 170$, $\sigma = 10$, $n = 50$, $Z_{0.025} = 1.96$.
- $IC = 170 \pm 1.96\frac{10}{\sqrt{50}} = 170 \pm 1.96\frac{10}{7.071} = 170 \pm 1.96 \times 1.414 = 170 \pm 2.77$
- $IC = [167.23, 172.77]$

Com Desvio Padrão Populacional (σ) Desconhecido (Distribuição t de Student)

Esta é a situação mais comum na prática, onde o desvio padrão populacional é desconhecido e é estimado pelo desvio padrão amostral (s).

Requisito: A população é normalmente distribuída ou o tamanho da amostra é grande ($n \geq 30$, pelo Teorema do Limite Central, onde a distribuição t se aproxima da normal).

Fórmula: (Bussab; Morettin, 2017, p. 198)

$$IC = \bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Onde:

- $\bar{x}$: média amostral.
- $t_{\alpha/2,n-1}$: valor crítico da distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade para o nível de confiança $1-\alpha$.
- s: desvio padrão amostral.
- n: tamanho da amostra.
- $\frac{s}{\sqrt{n}}$: erro padrão da média (estimado).

A **distribuição t de Student** é mais "gorda" nas caudas que a distribuição normal, refletindo a incerteza adicional de estimar σ a partir de s. À medida que os graus de liberdade ($n-1$) aumentam, a distribuição t se aproxima da distribuição normal.

Exemplo: Uma amostra de 25 estudantes de uma turma tem uma média de peso de 68 kg e um desvio padrão amostral de 5 kg. Construa um IC de 95% para o peso médio da população de estudantes.

- $\bar{x} = 68$, $s = 5$, $n = 25$. Graus de liberdade $df = n - 1 = 24$.
- Para um IC de 95%, $\alpha/2 = 0.025$.
- Valor crítico $t_{0.025,24} \approx 2.064$ (obtido de tabelas t ou software).
- $IC = 68 \pm 2.064\frac{5}{\sqrt{25}} = 68 \pm 2.064\frac{5}{5} = 68 \pm 2.064 \times 1 = 68 \pm 2.064$
- $IC = [65.936, 70.064]$

Código para Intervalo de Confiança para a Média

Python

```python
import numpy as np
from scipy import stats
```

```python
# Exemplo 1: Sigma conhecido (Z-test)
data_z = np.array() # Média amostral
sigma_pop = 10 # Desvio padrão populacional conhecido
n_z = 50
conf_level_z = 0.95

# Erro Padrão
se_z = sigma_pop / np.sqrt(n_z)

# Valor Crítico Z
z_critical = stats.norm.ppf(1 - (1 - conf_level_z) / 2) # ppf é a função inversa da CDF
margin_error_z = z_critical * se_z

ic_lower_z = data_z - margin_error_z
ic_upper_z = data_z + margin_error_z

print("--- IC para Média (Sigma Conhecido) ---")
print(f"Média amostral: {data_z:.2f}")
print(f"Erro Padrão: {se_z:.3f}")
print(f"Valor Crítico Z: {z_critical:.3f}")
print(f"Margem de Erro: {margin_error_z:.3f}")
print(f"Intervalo de Confiança ({conf_level_z*100:.0f}%): [{ic_lower_z:.3f}, {ic_upper_z:.3f}]")

# Exemplo 2: Sigma desconhecido (t-test)
data_t = np.array()
n_t = len(data_t)
mean_t = np.mean(data_t)
std_dev_t = np.std(data_t, ddof=1) # ddof=1 para desvio padrão amostral
conf_level_t = 0.95

# Erro Padrão
se_t = std_dev_t / np.sqrt(n_t)

# Graus de Liberdade
df_t = n_t - 1

# Valor Crítico t
t_critical = stats.t.ppf(1 - (1 - conf_level_t) / 2, df_t)
margin_error_t = t_critical * se_t

ic_lower_t = mean_t - margin_error_t
ic_upper_t = mean_t + margin_error_t

print("\n--- IC para Média (Sigma Desconhecido) ---")
print(f"Média amostral: {mean_t:.2f}")
```

```python
print(f"Desvio Padrão amostral: {std_dev_t:.2f}")
print(f"Erro Padrão: {se_t:.3f}")
print(f"Graus de Liberdade: {df_t}")
print(f"Valor Crítico t: {t_critical:.3f}")
print(f"Margem de Erro: {margin_error_t:.3f}")
print(f"Intervalo de Confiança ({conf_level_t*100:.0f}%): [{ic_lower_t:.3f}, {ic_upper_t:.3f}]")

# O pacote statsmodels oferece uma forma mais direta
# import statsmodels.stats.api as sm
# ci_sm = sm.DescrStatsW(data_t).tconfint_mean(alpha=1-conf_level_t)
# print(f"IC (statsmodels): [{ci_sm:.3f}, {ci_sm:.3f}]")
```

R

```r
# Exemplo 1: Sigma conhecido (Z-test) - Usando a fórmula manual
mean_z <- 170
sigma_pop <- 10 # Desvio padrão populacional conhecido
n_z <- 50
conf_level_z <- 0.95

# Erro Padrão
se_z <- sigma_pop / sqrt(n_z)

# Valor Crítico Z
z_critical <- qnorm(1 - (1 - conf_level_z) / 2) # qnorm é a função inversa da CDF
margin_error_z <- z_critical * se_z

ic_lower_z <- mean_z - margin_error_z
ic_upper_z <- mean_z + margin_error_z

cat("--- IC para Média (Sigma Conhecido) ---\n")
cat(sprintf("Média amostral: %.2f\n", mean_z))
cat(sprintf("Erro Padrão: %.3f\n", se_z))
cat(sprintf("Valor Crítico Z: %.3f\n", z_critical))
cat(sprintf("Margem de Erro: %.3f\n", margin_error_z))
cat(sprintf("Intervalo de Confiança (%.0f%%): [%.3f, %.3f]\n", conf_level_z * 100, ic_lower_z, ic_upper

# Exemplo 2: Sigma desconhecido (t-test) - Usando a função t.test()
data_t <- c(68, 65, 72, 70, 63, 75, 69, 66, 71, 67, 68, 64, 73, 70, 66, 68, 69, 72, 65, 67, 70, 68, 66,
n_t <- length(data_t)
mean_t <- mean(data_t)
std_dev_t <- sd(data_t) # sd() em R calcula o desvio padrão amostral (n-1 no denominador)
conf_level_t <- 0.95
```

```r
# Erro Padrão
se_t <- std_dev_t / sqrt(n_t)

# Graus de Liberdade
df_t <- n_t - 1

# Valor Crítico t
t_critical <- qt(1 - (1 - conf_level_t) / 2, df_t)
margin_error_t <- t_critical * se_t

ic_lower_t <- mean_t - margin_error_t
ic_upper_t <- mean_t + margin_error_t

cat("\n--- IC para Média (Sigma Desconhecido) ---\n")
cat(sprintf("Média amostral: %.2f\n", mean_t))
cat(sprintf("Desvio Padrão amostral: %.2f\n", std_dev_t))
cat(sprintf("Erro Padrão: %.3f\n", se_t))
cat(sprintf("Graus de Liberdade: %d\n", df_t))
cat(sprintf("Valor Crítico t: %.3f\n", t_critical))
cat(sprintf("Margem de Erro: %.3f\n", margin_error_t))
cat(sprintf("Intervalo de Confiança (%.0f%%): [%.3f, %.3f]\n", conf_level_t * 100, ic_lower_t, ic_upper_

# Usando a função t.test() que já calcula o IC
test_result <- t.test(data_t, conf.level = conf_level_t)
cat("\nIC (t.test()):\n")
print(test_result$conf.int)
```

Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional (P)

Usado para estimar a proporção de elementos na população que possuem uma determinada característica.

Requisitos:

- A amostra é aleatória simples.
- As condições para a aproximação normal da distribuição amostral da proporção são satisfeitas (geralmente $n\hat{p} \geq 5$ e $n(1-\hat{p}) \geq 5$, onde alguns autores usam 10).

Fórmula: (Bussab; Morettin, 2017, p. 200)

$$IC = \hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Onde:

- $\hat{p}$: proporção amostral (número de sucessos / n).
- $Z_{\alpha/2}$: valor crítico da distribuição normal padrão.
- n: tamanho da amostra.

- $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$: erro padrão da proporção.

Exemplo: Em uma pesquisa com 400 eleitores, 220 disseram que votariam no Candidato X. Construa um IC de 99% para a proporção de eleitores que votariam no Candidato X.

- $\hat{p} = 220/400 = 0.55$. $n = 400$.
- Para um IC de 99%, $Z_{0.005} = 2.576$.
- Erro Padrão: $\sqrt{\frac{0.55(1-0.55)}{400}} = \sqrt{\frac{0.55 \times 0.45}{400}} = \sqrt{\frac{0.2475}{400}} = \sqrt{0.00061875} \approx 0.02487$
- $IC = 0.55 \pm 2.576 \times 0.02487 = 0.55 \pm 0.0641$
- $IC = [0.4859, 0.6141]$

Código para Intervalo de Confiança para a Proporção

Python

```
import numpy as np
from scipy import stats
import statsmodels.stats.api as sm

# Dados do problema
n_sucessos = 220 # Número de eleitores que votariam no Candidato X
n_total = 400 # Tamanho total da amostra
conf_level_prop = 0.99

# Proporção amostral
p_hat = n_sucessos / n_total

# Erro Padrão da proporção
se_prop = np.sqrt((p_hat * (1 - p_hat)) / n_total)

# Valor Crítico Z
z_critical_prop = stats.norm.ppf(1 - (1 - conf_level_prop) / 2)

# Margem de Erro
margin_error_prop = z_critical_prop * se_prop

ic_lower_prop = p_hat - margin_error_prop
ic_upper_prop = p_hat + margin_error_prop

print("--- IC para Proporção Populacional ---")
print(f"Proporção amostral (p_hat): {p_hat:.3f}")
print(f"Erro Padrão: {se_prop:.4f}")
print(f"Valor Crítico Z: {z_critical_prop:.3f}")
print(f"Margem de Erro: {margin_error_prop:.4f}")
print(f"Intervalo de Confiança ({conf_level_prop*100:.0f}%): [{ic_lower_prop:.4f}, {ic_upper_prop:.4f}]
```

```python
# Usando o pacote statsmodels para verificação (função confint_proportion)
# Note: statsmodels tem algumas opções para o método, "normal" é o mais comum
ci_sm_prop = sm.proportion_confint(count=n_sucessos, nobs=n_total, alpha=1-conf_level_prop, method='norm
print(f"IC (statsmodels): [{ci_sm_prop:.4f}, {ci_sm_prop:.4f}]")
```

R

```r
# Dados do problema
n_sucessos <- 220 # Número de eleitores que votariam no Candidato X
n_total <- 400 # Tamanho total da amostra
conf_level_prop <- 0.99

# Proporção amostral
p_hat <- n_sucessos / n_total

# Erro Padrão da proporção
se_prop <- sqrt((p_hat * (1 - p_hat)) / n_total)

# Valor Crítico Z
z_critical_prop <- qnorm(1 - (1 - conf_level_prop) / 2)

# Margem de Erro
margin_error_prop <- z_critical_prop * se_prop

ic_lower_prop <- p_hat - margin_error_prop
ic_upper_prop <- p_hat + margin_error_prop

cat("--- IC para Proporção Populacional ---\n")
cat(sprintf("Proporção amostral (p_hat): %.3f\n", p_hat))
cat(sprintf("Erro Padrão: %.4f\n", se_prop))
cat(sprintf("Valor Crítico Z: %.3f\n", z_critical_prop))
cat(sprintf("Margem de Erro: %.4f\n", margin_error_prop))
cat(sprintf("Intervalo de Confiança (%.0f%%): [%.4f, %.4f]\n", conf_level_prop * 100, ic_lower_prop, ic_

# O pacote `stats` do R tem uma função para testes de proporção que também pode gerar ICs
# prop.test(x, n, conf.level = 0.99)$conf.int
# ou binom.test(x, n, conf.level = 0.99)$conf.int
test_prop_result <- prop.test(n_sucessos, n_total, conf.level = conf_level_prop)
cat("\nIC (prop.test()):\n")
print(test_prop_result$conf.int)
```

Interpretando um Intervalo de Confiança

A interpretação correta é crucial e frequentemente mal compreendida:

"Podemos ter $X\%$ de confiança de que o verdadeiro parâmetro populacional (média, proporção, etc.) está contido neste intervalo [Limite Inferior, Limite Superior]."

O que NÃO significa:

- NÃO significa que há $X\%$ de chance de o parâmetro populacional *estar* no intervalo. O parâmetro populacional é um valor fixo (embora desconhecido); ele está ou não está no intervalo.
- NÃO significa que há $X\%$ de chance de a *próxima* amostra ter sua estimativa pontual dentro deste intervalo.
- NÃO significa que $X\%$ dos dados da amostra estão dentro do intervalo.

O que significa (corretamente): Se repetirmos o processo de amostragem e construirmos um intervalo de confiança para cada amostra, espera-se que $X\%$ desses intervalos construídos contenham o verdadeiro parâmetro populacional.

Fatores que Afetam a Largura do Intervalo de Confiança

A largura da Margem de Erro (e, consequentemente, do intervalo de confiança) é influenciada por:

1. **Nível de Confiança:** Um nível de confiança maior (ex: 99% vs. 95%) requer um intervalo mais amplo (maior Margem de Erro) para ter maior certeza.
2. **Tamanho da Amostra (n):** Um tamanho de amostra maior resulta em um erro padrão menor e, portanto, um intervalo mais estreito e preciso. (Quanto maior n, menor a variabilidade amostral).
3. **Desvio Padrão (σ ou s):** Um desvio padrão maior na população/amostra indica maior variabilidade nos dados e, consequentemente, um erro padrão maior e um intervalo mais amplo.

Relação com Outros Conceitos

A estimação é a próxima etapa lógica após a amostragem e a estatística descritiva.

- **Amostragem:** Sem uma amostra representativa, as estimativas (pontual ou por intervalo) seriam viesadas e não poderiam ser generalizadas.
- **Estatística Descritiva:** As estimativas pontuais (média, desvio padrão, proporção amostrais) são medidas descritivas da amostra, que servem como base para a construção dos intervalos de confiança.
- **Distribuições de Probabilidade:** A construção de ICs depende da compreensão de distribuições como a normal (para Z) e a t de Student (para t), bem como do Teorema do Limite Central.
- **Inferência Estatística:** A estimação por intervalo é uma das principais formas de inferência, permitindo-nos tirar conclusões sobre a população com um grau quantificável de incerteza.

Verificação de Aprendizagem

Resolva os problemas abaixo, construindo e interpretando os intervalos de confiança solicitados. Utilize Python ou R para auxiliar nos cálculos.

1. **Problema 1 (Média de Gasto - σ Conhecido):**

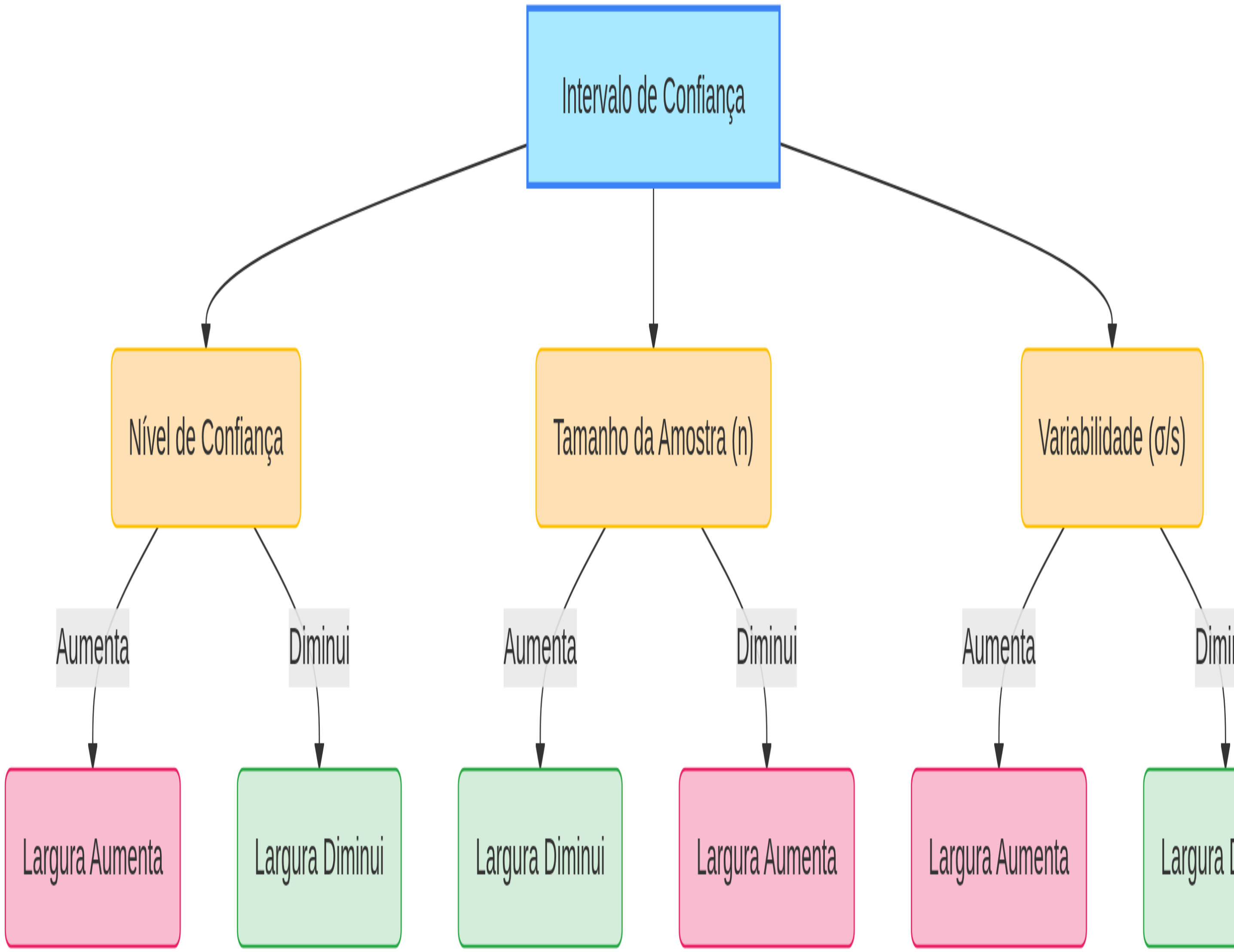

Figure 2: Fatores que Afetam a Largura do Intervalo de Confiança

Uma empresa de varejo sabe, por estudos anteriores, que o desvio padrão do gasto semanal de seus clientes é de R$ 30. Uma amostra aleatória de 100 clientes revelou um gasto médio semanal de R$ 120.

a) Qual é a estimativa pontual para o gasto médio semanal de *todos* os clientes?
b) Construa um intervalo de confiança de 95% para o gasto médio semanal populacional.
c) Interprete o intervalo de confiança calculado no contexto do problema.

2. **Problema 2 (Tempo de Entrega - σ Desconhecido):**

   Uma amostra de 30 entregas de um serviço de *delivery* registrou os seguintes tempos (em minutos): `[28, 35, 32, 29, 40, 31, 33, 27, 36, 30, 29, 34, 38, 30, 31, 35, 32, 28, 30, 34, 37, 29, 32, 30, 31, 36, 28, 33, 30, 35]`

   a) Calcule a estimativa pontual para o tempo médio de entrega populacional e o desvio padrão amostral.
   b) Construa um intervalo de confiança de 90% para o tempo médio de entrega populacional.
   c) Interprete o intervalo de confiança.

3. **Problema 3 (Aprovação de Recurso - Proporção):**

   Em uma amostra de 200 pedidos de recurso analisados, 130 foram aprovados.

   a) Qual é a estimativa pontual para a proporção de pedidos de recurso aprovados na população?
   b) Construa um intervalo de confiança de 99% para a proporção populacional de pedidos de recurso aprovados.
   c) Interprete o intervalo de confiança.

4. **Problema 4 (Fatores da Largura do IC):**

   Considere o intervalo de confiança para a média. Como a largura deste intervalo mudaria (aumentaria, diminuiria, permaneceria a mesma) em cada uma das seguintes situações, mantendo os outros fatores constantes?

   a) O nível de confiança é aumentado de 95% para 99%.
   b) O tamanho da amostra é aumentado de 50 para 200.
   c) O desvio padrão da amostra é reduzido.

Soluções da Atividade

Referências Bibliográficas

BUSSAB, Luiz O. de M.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.