

Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis

Márcio Nicolau

2025-08-11

Table of contents

Objetivos da Aula	1
Conteúdo	1
1. Conjuntos Enumeráveis	2
2. Conjuntos Não-Enumeráveis	2
3. Cardinalidade e Comparação de Conjuntos	2
Exemplo: Enumerando os Números Racionais	4
Diagrama: Relação entre Conjuntos Numéricos	4
Exercícios para Casa	4
Referências Bibliográficas	6

List of Figures

1	Enumeração por Diagonais em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	3
2		4
3	Relação entre Conjuntos Numéricos	5

Objetivos da Aula

- Compreender o conceito de conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis
- Diferenciar entre conjuntos contáveis e não-contáveis
- Aplicar o conceito de enumeração em problemas computacionais

Conteúdo

i Definições essenciais

- **Enumerável (contável):** existe bijeção com $\mathbb{N}$, ou enumeração total ($e: \mathbb{N} \rightarrow A$).
- **Não-enumerável:** não existe tal bijeção; cardinalidade estritamente maior que $|\mathbb{N}|$.
- **Cardinalidades:**
 - $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (contável).

- $|(0, 1)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (contínuo), não-enumerável (prova por diagonalização de Cantor; ver Sipser (2012)).

- **Fatos úteis:**

- União contável de conjuntos enumeráveis é enumerável.
- Produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável (enumeração por diagonais).

1. Conjuntos Enumeráveis

- Definição formal de conjunto enumerável
- Exemplos de conjuntos enumeráveis:
 - Números naturais $\mathbb{N}$
 - Números inteiros $\mathbb{Z}$
 - Números racionais $\mathbb{Q}$
- Técnicas de enumeração

2. Conjuntos Não-Enumeráveis

- O conceito de não-enumerabilidade
- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$
- O conjunto das funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$

Prova por Diagonalização de Cantor (esboço)

- Suponha, para fins de contradição, que as sequências infinitas $x: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ possam ser enumeradas: $x_1, x_2, x_3, \dots$
- Construa a sequência y tal que $y(i) = 1 - x_i(i)$ (inverte o i -ésimo bit da i -ésima sequência).
- Então y difere de cada x_i no i -ésimo bit, logo y não aparece na enumeração — contradição. Portanto, o conjunto é não-enumerável (ver Sipser (2012)).

3. Cardinalidade e Comparação de Conjuntos

- Noção de cardinalidade
- Conjuntos equipotentes
- O conceito de contagem em conjuntos infinitos

Diagrama: Enumeração por Diagonais em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Prova: Produto de Enumeráveis é Enumerável (esboço)

Sejam $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $B = \{b_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ enumerações. Para enumerar $A \times B$:

- Considere o reticulado de índices $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e percorra por diagonais de soma $s = i + j$ crescente (ver Section).
- Liste os pares (a_i, b_j) na mesma ordem dos índices.

Alternativamente, use a **função de pareamento de Cantor** $\pi(i, j) = \frac{1}{2}(i + j)(i + j + 1) + j$, que é uma bijeção $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Assim, $k = \pi(i, j)$ fornece uma enumeração explícita.

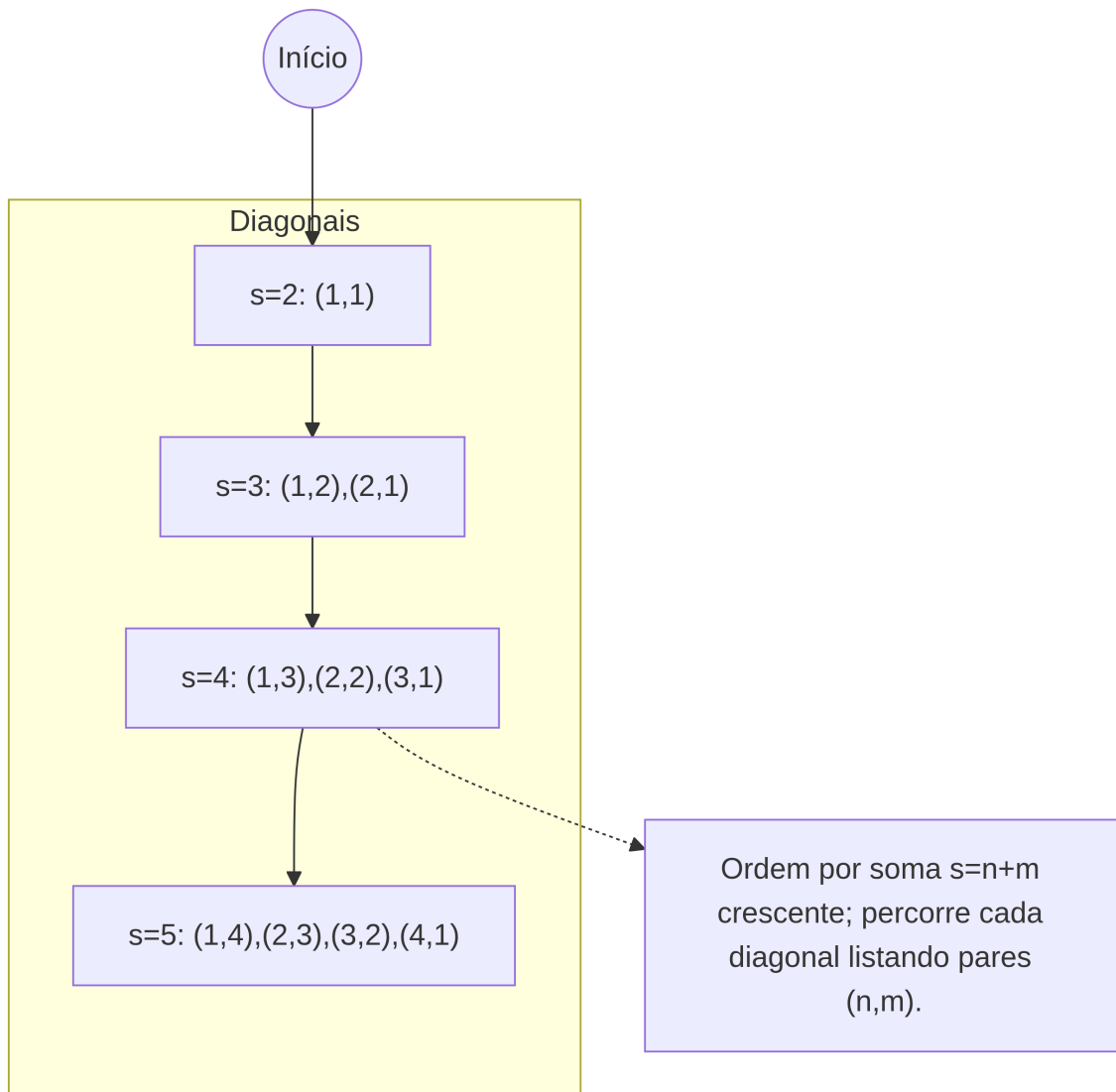


Figure 1: Enumeração por Diagonais em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Exemplo: Enumerando os Números Racionais

```
from math import gcd

def racionais_positivos_unicos():
    """Gera racionais positivos em termos reduzidos (n/d) sem duplicatas,
    percorrendo diagonais de n+d = s (s = 2,3,...) em ordem crescente."""
    s = 2
    while True:
        for n in range(1, s):
            d = s - n
            if gcd(n, d) == 1:
                yield (n, d)
        s += 1

print("Primeiros 20 racionais positivos em termos reduzidos (n/d):")
gen = racionais_positivos_unicos()
for i in range(20):
    n, d = next(gen)
    print(f"{n}/{d}", end="\n" if i % 5 == 4 else " ")
```

```
Primeiros 20 racionais positivos em termos reduzidos (n/d):
1/1 1/2 2/1 1/3 3/1
1/4 2/3 3/2 4/1 1/5
5/1 1/6 2/5 3/4 4/3
5/2 6/1 1/7 3/5 5/3
```

Figure 2

Diagrama: Relação entre Conjuntos Numéricos

Atividade Prática

1. Implemente uma função em Python que gere os números inteiros na seguinte ordem: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$
2. Explique por que o conjunto dos números reais entre 0 e 1 é não-enumerável (veja Section).
3. Demonstre que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Exercícios para Casa

1. Mostre que a união de uma quantidade enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.
2. O produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável? Justifique sua resposta (veja Section e Section).
3. O conjunto das sequências finitas de números naturais é enumerável? E o conjunto das sequências infinitas?

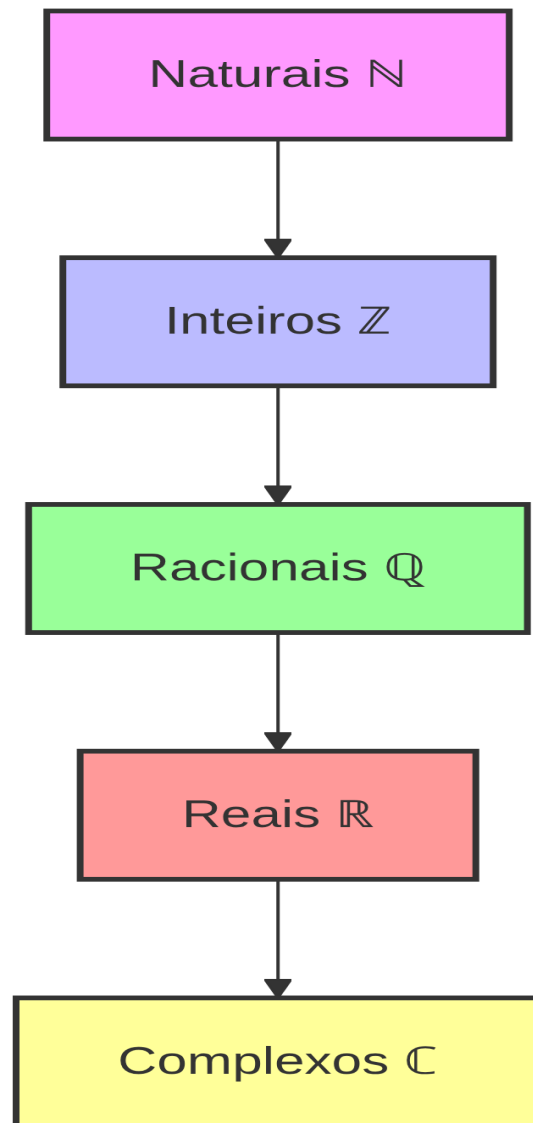


Figure 3: Relação entre Conjuntos Numéricos

Referências Bibliográficas

SIPSER, Michael. **Introdução à Teoria da Computação**. 3. ed. São Paulo, Brasil: Cengage Learning, 2012.